EXERCICE N°4 :	50'	7 points	

Soit la fonction définie sur par $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)+2}{x}=+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{8\sqrt{x}+(x+1)^3}{2\sqrt{x}(x+1)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation.

c) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=[-2,+\infty[$.

d) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ et que : $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

e) On note h la fonction réciproque de f.

On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de h dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer les courbes $\mathscr{C}$ de f et $\mathscr{C}'$ de h dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3°) Soit H une primitive du h sur J.

a) Montrer que $H\circ f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $(H\circ f)'(x)=x f'(x)$.

b) En déduire que pour tout réels positifs a et b on a : $\int_{f(a)}^{f(b)}h(x)\,dx=\int_a^b x f'(x)dx$.

4°) On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire en $(u.a)$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\dfrac{1}{2}$.

a) En utilisant une intégration par partie montrer que $\int_\alpha^1 x f'(x)\,dx=-\dfrac{7}{6}+\dfrac{2}{3}\alpha\sqrt{\alpha}+\dfrac{2}{\alpha+1}$.

b) Montrer alors que $\mathscr{A}=\dfrac{10\alpha+6}{3(\alpha+1)^2}-\dfrac{7}{6}(u.a)$.

Qarray.tn - Aqra Blech- Qarray.tn